CONI E CONICHE

ovvero

PERCHÉ LA SEZIONE DI UN CONO È UNA CONICA ?

1 INTRODUZIONE

La parola **conica** sta per **sezione conica**; infatti gli antichi Greci definirono le coniche come le curve che si ottengono tagliando un cono con un piano *non* passante per il vertice del cono. Con metodi puramente geometrici (la geometria analitica non esisteva...), essi, in particolare **Apollonio** di Perga (262-190 a.C.), trovarono molte proprietà delle coniche.

Più spesso oggi le definiamo come luoghi dei punti del piano, dimenticandoci, per così dire, del cono. Naturalmente, lavorare direttamente con un luogo del piano è più pratico, ma che legame c'è tra le diverse definizioni? Perché la sezione di un cono con un piano opportunamente inclinato è un'ellisse e non, per esempio, una curva a forma di uovo? Dopo tutto, il cono è più "stretto" vicino al vertice, ed è perfettamente plausibile che ciò accada anche per la curva sezione.

Nel 1822 il matematico belga **Dandelin** propose una brillante dimostrazione, che fa uso di sfere tangenti al cono e al piano secante; in questo laboratorio, seguendo le sue idee, costruirai dei modelli tridimensionali per comprenderla più facilmente.

2 PER COMINCIARE

Questo paragrafo serve a richiamare alcuni fatti di geometria solida (parti A, C, D) o piana (parte B) che utilizzerai per la dimostrazione di Dandelin. Per quanto riguarda la geometria solida, volutamente non è stata fatta alcuna figura; usa liberamente gli oggetti che ti sono forniti, o quanto a tua disposizione, per visualizzare in un contesto 3D la situazione in esame.

A.- RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

- Considera un piano α, un suo punto A, una retta r (nello spazio) passante per A. Quando la retta r è detta **perpendicolare** in A al piano α? (Suggerimento: con-

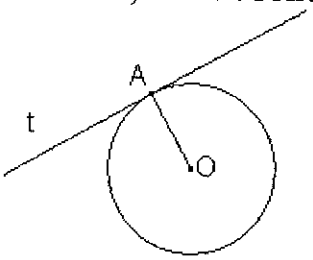
sidera le rette di α passanti per A) quando r è ⊥ a ogni retta di α passante per A.

Il punto A = r ∩ α è detto piede della perpendicolare.

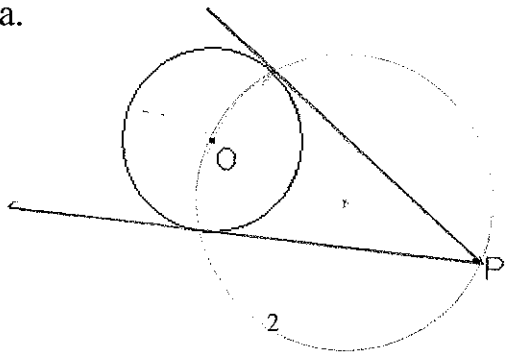
- La **proiezione ortogonale** di un **punto** P su un piano α è il piede della perpendicolare ad α passante per P.
- La **proiezione ortogonale** di una **retta** r su un piano α (cioè l'insieme delle proiezioni ortogonali dei punti di r) è una retta se r NON è perpendicolare ad α ; altrimenti è un punto .
- Dati un piano α e una retta r secante α (cioè avente un solo punto in comune con α), come definiresti l'**angolo** tra la **retta** e il **piano**? (Suggerimento: tieni conto della definizione precedente) angolo (acuto) tra r e la sua proiez. ortogonale, angolo retto se r ⊥ α .
  Controlla che la definizione sia valida senza eccezioni, altrimenti modificala.
- Dati due piani α e β aventi in comune una retta r, l'**angolo** tra i due **piani** è ..... angolo (acuto) tra le rette intersezione dei piani con un piano ⊥ r.
- Dati un piano α e una retta r secante α, quanti piani ci sono contenenti la retta r e perpendicolari al piano α? ∞ se r ⊥ α, altrimenti uno.
  Controlla che la tua risposta sia valida senza eccezioni.

B.- CIRCONFERENZE E RETTE NEL PIANO

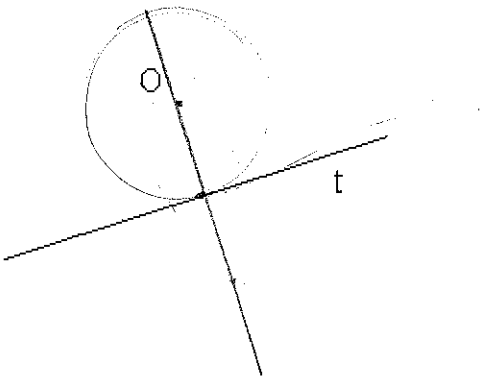
- Una **circonferenza** è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto O, detto centro . Il suo raggio è la distanza fissata
- Una retta t avente un solo punto A in comune con la circonferenza è detta tangente ; in tal caso, OA e t sono tra loro perpendicolari.



- Se P è un punto esterno alla circonferenza c di centro O e raggio r, ci sono 2 rette tangenti a c passanti per P. Per costruire con riga e compasso i punti di tangenza, bisogna intersecare c con la circonferenza di diametro OP . I punti di tangenza sono equidistanti da P. Completa la figura.



- Data una retta t e un qualsiasi punto O del piano $\notin$ t, esiste un'unica circonferenza di centro O tangente a t; il punto di tangenza è ...il piede della perpendicolare a t condotta da O.... .
  Completa la figura.



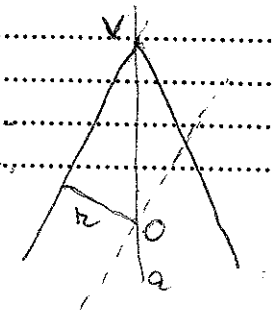
C.- SFERE

- La superficie sferica (**sfera** nel seguito) di centro O e raggio r è il luogo S dei punti dello spazio ...aventi distanza r da O... ; essa può essere ottenuta per rotazione completa (di 360°) di una ...semicirconferenza... ... intorno al...diametro... .
- Una retta t avente un solo punto A in comune con la sfera S è detta ...tangente in A alla sfera... ; in tal caso, OA e t sono tra loro ...perpendicolari.
- Se t e t' sono due rette passanti per P aventi rispettivamente i soli punti A e A' in comune con la sfera S, i segmenti PA e PA' sono tra loro ...congruenti... .
- Un **cerchio massimo** della sfera S è l'intersezione (o **sezione**) di S con un ....piano passante per O... ; esso ha raggio ...r... .
- Siano A un punto della sfera S, β un piano contenente la retta OA, c_β il cerchio massimo sezione della sfera con β, t_β la retta di β tangente a c_β in A. Al variare del piano β, le rette t_β descrivono il piano α ...perpendicolare... in A alla retta OA. Tale piano ha distanza ...r... da O, ha in comune con la sfera ...solo... ...il punto A e si chiama piano ...tangente... alla sfera in A.
- Dato un piano α e un qualsiasi punto O dello spazio $\notin \alpha$, esiste un'unica sfera di centro O tangente ad α; il punto di tangenza A è ...il piede della perpendicolare ad α per O...; il raggio è ...OA... .

D.- CONI

- Siano c una circonferenza, a la retta passante per il suo centro O e perpendicolare al piano che la contiene, V un punto di a (distinto da O). Le infinite semirette di origine V che passano per i punti di c costituiscono la **superficie conica circolare retta illimitata** (**cono** nel seguito) di **vertice** V e **direttrice** c; essa può essere generata per rotazione completa (di 360°) intorno all'**asse** a di una qualsiasi di queste ...semirette... , dette **generatrici** del cono. L'angolo tra l'asse e una qualsiasi generatrice si chiama **apertura** del cono.

- Costruisci un cono (necessariamente limitato...) ritagliando e fissando con lo scotch lo **sviluppo** fornito.
- Le due generatrici intersezione del cono con un qualsiasi piano β contenente l'asse a formano un angolo di ampiezza ..2.: apertura.....
- Se da un punto V esterno a una sfera S si tracciano *tutte* le semirette tangenti a S, si ottiene un cono di vertice ..V..... e asse la retta ..VO., dove O è il centro di S..... Poiché ogni generatrice del cono è tangente a S, il cono è detto ..tangente..... alla sfera. I punti di tangenza formano una ..circon-ferenza..... il cui piano è ...perpendicolare..... all'asse del cono.
  La sezione (intersezione) di sfera e cono con un qualsiasi piano β per a è data da un cerchio massimo e da due generatrici ad esso ..tangenti.... .
- Viceversa, dato un qualsiasi cono illimitato, esso ha sfere tangenti di qualsiasi raggio; sai darne una giustificazione? ...Considero una sezione del cono con un piano β come sopra. Fissato r, ∃! un solo pto O dell'asse avente distanza r dalle due generatrici: esso è il centro della sfera.



3 L'ELLISSE

COSTRUZIONE DEL MODELLO

1. Taglia il rettangolo colorato lungo il contorno.

2. Sul rettangolo colorato taglia lungo metà curva, seguendo *accuratamente* l'arco BCD (per un risultato preciso, prima pratica con il cutter una breve incisione lungo l'arco BCD, poi infila la lama delle forbici nell'incisione e completa il taglio).

3. Taglia lo sviluppo laterale del cono (cui è stata tolta la parte più vicina al vertice per rendere più facile il montaggio). Taglia *accuratamente* dal punto A al punto B lungo la curva che si trova tra i due archi di circonferenza e dal punto nero sul bordo destro (dove finisce la tacca sulla linguetta) al punto D.

4. "Arrotola" il cono in modo da leggere correttamente le lettere scritte sulla superficie e chiudilo prima *sopra* e poi *sotto* il taglio. Per fare ciò, sovrapponi *esattamente* i bordi dello sviluppo del cono, lasciando la linguetta all'*interno*;

accertati che gli estremi delle linee "orizzontali" combacino e fissa con lo scotch, arrivando con quest'ultimo a un paio di millimetri dal taglio.

5. Per incastrare tra loro cono e piano, appoggia il cono sul tavolo, poi prendi in mano il rettangolo in modo da leggere correttamente le lettere scritte su di esso. Abbassa leggermente la parte del rettangolo con il punto F_2 e inseriscila dentro il cono (vicino al punto A sul cono), facendo contemporaneamente passare la punta del cono nel buco che si è formato. Fa' scivolare il rettangolo verso il basso, fino a quando i punti segnati con lettere uguali coincidono. Quando hai capito come si fa, rimuovi *con delicatezza* il rettangolo, metti nel cono la sfera piccola S_1 e riposiziona il rettangolo (forse ti sarà più facile se capovolgi il cono...).

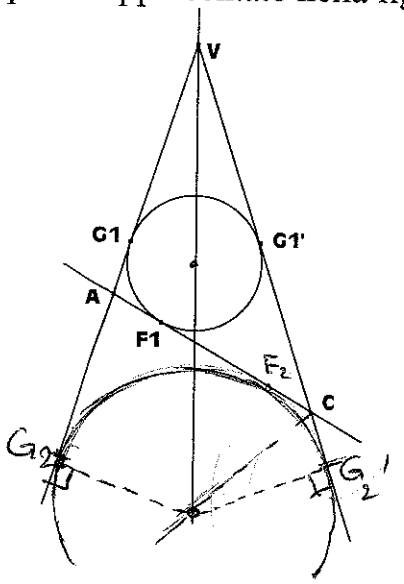
6. Posa la sfera grande S_2 sul tavolo e appoggiaci sopra il cono con l'inserto colorato. Ora sei pronto per ragionare: infatti, il modello che hai costruito rappresenta un cono circolare retto tagliato da un piano α (il rettangolo colorato) avente inclinazione, rispetto all'asse del cono, *maggiore* dell'apertura del cono e minore di un angolo retto.

LA DIMOSTRAZIONE

- Quante sono le sfere tangenti al cono e tangenti al piano secante α ? due
- Come sono situate queste sfere rispetto al piano secante? una in un semispazio, l'altra nell'altro.
- I punti F_1 e F_2 sono i punti di contatto tra le sfere e il piano α
- Considera sul modello tridimensionale un punto qualsiasi della curva intersezione della superficie del cono con il piano α, per esempio quello indicato con P, e la generatrice P_1P_2 del cono passante per P.
  I segmenti PF_1 e PP_1 sono congruenti perché uscenti da P e tangenti alla sfera S_1.
  Analogamente, $PF_2 \cong PP_2$, quindi $PF_1 + PF_2 \cong PP_1 + PP_2 = P_1P_2$.
- Che cosa succede se scegli un altro punto P' della curva intersezione? Come puoi concludere che questa curva è un'ellisse? Si considera la generatrice $P_1'P_2'$ per P' e si ha
  $P'F_1 \cong P'P_1'$, $P'F_2 \cong P'P_2' \Rightarrow P'F_1 + P'F_2 \cong P_1'P_2'$
  Ma $P_1'P_2' \cong P_1P_2 \Rightarrow PF_1 + PF_2$ non cambia al variare di P sulla curva sezione, dunque questa curva è un'ellisse.

UN PIANO IMPORTANTE

Immagina di tagliare cono, piano α e sfere tangenti con il piano β contenente l'asse a del cono e perpendicolare ad α. Quello che vedresti sul piano β (ovvero la *sezione* con β di cono, piano α e sfere) è in parte rappresentato nella figura seguente.

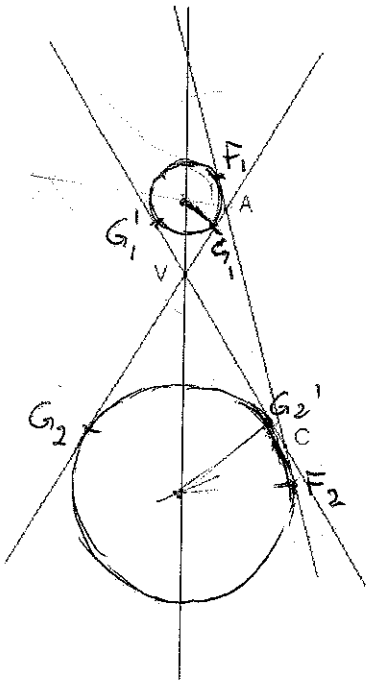


- Quale retta rappresenta la sezione del piano α con il piano β? AC .
- Che cosa è per la sfera piccola S_1 la circonferenza nella figura? un cerchio massimo (quello sul piano β).
- Considera i punti G_1, G_1' nella figura precedente; a quale linea appartengono i corrispondenti punti del modello tridimensionale? alla circonferenza dei punti di tangenza tra cono e S_1.
- Completa la figura disegnando gli oggetti mancanti; per ottenere una figura precisa, ricorda che i punti della bisettrice di un angolo sono equidistanti dai lati dell'angolo stesso.
- Sapresti giustificare perché i punti F_1 e F_2 appartengono a β? Poiché, sfere e piano α sono simmetrici rispetto a β, quindi i punti di tangenza devono appartenere a β.
- Sapresti giustificare perché i vertici A e C dell'ellisse appartengono a β? Anche il cono è simmetrico rispetto a β, quindi l'ellisse è simmetrico rispetto a β, ovvero alla retta AC. Poiché esso contiene i fuochi, è l'asse maggiore.

4 L'IPERBOLE

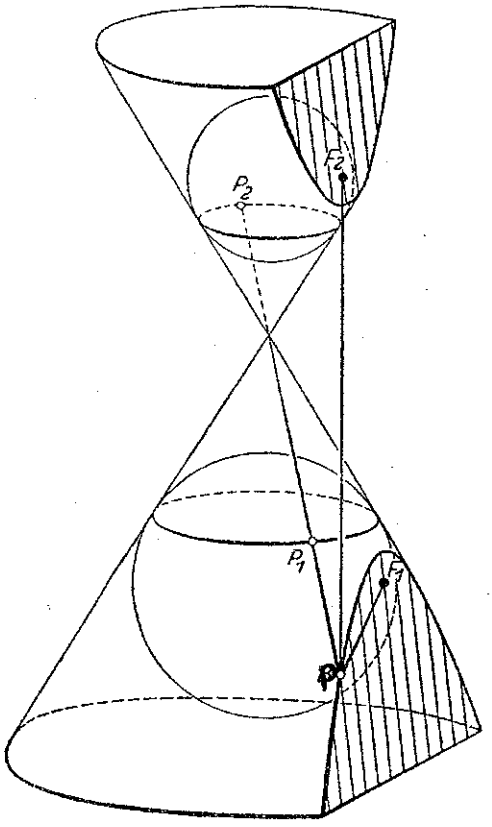
Ora fa' uno sforzo di immaginazione: supponi di avere un cono *completo* (o a due falde), cioè la superficie generata dalla rotazione intorno ad un asse di una retta incidente l'asse in V (una specie di "clessidra" illimitata...), e di tagliarlo con un piano α *non* passante per V.
Se l'angolo tra l'asse del cono e il piano α (angolo tra l'asse e la sua proiezione ortogonale su α) è *minore* dell'apertura del cono stesso (angolo tra l'asse e una generatrice del cono), questo piano taglia entrambe le parti del cono.

- Quante sono le sfere tangenti al cono completo (cioè tangenti a tutte le generatrici del cono) e tangenti al piano? ..due..... .
- Come sono situate queste sfere rispetto al piano secante? ...nel semi-spazio contenente V..... .
- A quale retta appartengono i centri delle sfere tangenti? ..asse del cono. .
- Immagina di tagliare cono completo, piano e sfere tangenti con il piano β passante per l'asse del cono e perpendicolare al piano α.
  Nella figura seguente sono disegnate le *sezioni* con β del cono e del piano α; completala rappresentando le sezioni delle sfere e i punti significativi; per ottenere una figura precisa, ricorda che i punti della bisettrice di un angolo sono ...equidistanti.... dai lati dell'angolo stesso.



- Da quante parti è costituita, questa volta, la curva intersezione tra cono e piano? ..due.... , una per ogni ....parte del cono completo..... .
  SE questa curva è una conica, che conica sarà? ....iperbole..... .

- Scrivi la definizione di questa conica.
luogo dei punti di un piano per i quali la differenza de due punti fissati (fuochi) è costante.
- Invece di costruire un modello, usa la figura qui sotto che lo rappresenta (naturalmente, è possibile rappresentare solo una parte limitata del cono completo). *Nota che, per maggiore chiarezza, nella figura la parte di piano secante interna al cono completo è stata tratteggiata e che non sono rappresentate le parti di cono "inutili".*



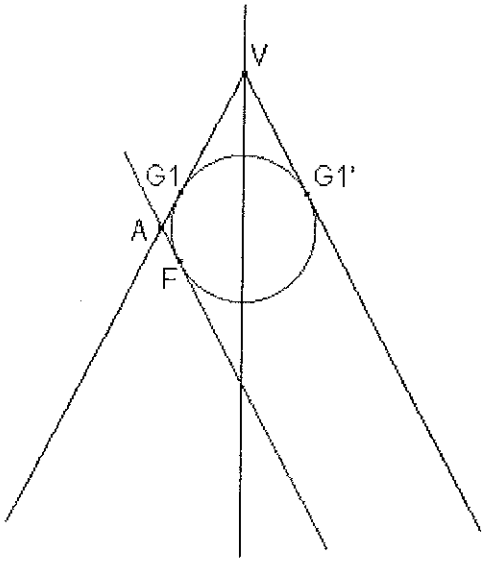
Osservando attentamente la figura, cerca di modificare la dimostrazione fatta nel caso dell'ellisse e concludi che la curva intersezione tra cono completo e piano è davvero un'iperbole. Scrivi la dimostrazione qui sotto.

P punto della curva sezione
P_1P_2 generatrice per P
$PF_1 \cong PP_1$, $PF_2 \cong PP_2 \Rightarrow$
$|PF_1 - PF_2| = P_1P_2$, che non varia al variare di P sulla curva sezione

5 LA PARABOLA

Resta da considerare il caso in cui l'inclinazione del piano α rispetto all'asse del cono è uguale all'apertura del cono stesso. Questa volta costruirai un modello, ma prima rispondi a queste domande.

- Secondo te, in questo caso è necessario considerare un cono completo oppure no? Non è necessario, il piano taglia una sola parte
- Quante sono le sfere tangenti al cono e tangenti al piano α? una .
- Spiega che cosa rappresenta la figura seguente. Non dimenticare di scrivere a quale generatrice è parallelo il piano α, e che cosa rappresentano i punti G_1, G_1', F ed A.



E' la sezione di cono, piano α, sfera tangente con il piano β contenente l'asse del cono e ⊥ α. AF è α ∩ β, F il punto di tangenza tra sfera e piano α, VG1' è la generatrice // α, G1 e G1' sono i punti di tangenza tra cono e sfera appartenenti al piano β.

COSTRUZIONE DEL MODELLO

1. Taglia il rettangolo colorato lungo il contorno.

2. Sul rettangolo colorato taglia *accuratamente* lungo la curva, ma *solo* dal bordo del rettangolo fini ai punti indicati con un quadratino nero. Con il cutter taglia lungo d, ma *solo* nella parte compresa tra i due punti indicati con una crocetta.

3. Taglia lo sviluppo laterale del cono (cui è stata tolta la parte più vicina al vertice per rendere più facile il montaggio). Taglia *accuratamente* lungo la curva che si trova sotto l'arco di circonferenza, ma *solo* nella parte compresa tra i punti indicati con un quadratino nero (per un risultato preciso, prima pratica con il cutter una breve incisione, poi infila la lama delle forbici nell'incisione e completa il taglio).

4. "Arrotola" il cono in modo da leggere correttamente le lettere scritte sulla superficie e sovrapponi *esattamente* i bordi dello sviluppo del cono, lasciando la linguetta all'*interno*. Accertati che gli estremi della linea "orizzontale" combacino e chiudi il cono fissando con lo scotch.

5. Posa il cono sul tavolo, prendi in mano il rettangolo colorato in modo da leggere correttamente le lettere scritte su di esso e incastralo nel cono facendo scivolare nella fenditura del cono la parte di rettangolo compresa tra i tagli che arrivano al bordo inferiore (può essere utile curvare leggermente il rettangolo). Accertati che i punti segnati coincidano. Il modello che hai costruito rappresenta un cono circolare retto tagliato da un piano α avente inclinazione, rispetto all'asse del cono, *uguale* all'apertura del cono. Capovolgi il cono e inserisci la sfera piccola in modo che risulti tangente al cono e al piano α.

6. Il rettangolo trasparente e lo spiedino ti serviranno tra un po'. Per intanto, ritaglia il rettangolo ed elimina la parte interna del disco; poi, partendo dai lati del rettangolo, taglia lungo d fino ai punti indicati con una crocetta. Con la punta del compasso fa' un foro nel punto H.

LA DIMOSTRAZIONE

- Considera sul modello tridimensionale un punto qualsiasi della curva intersezione della superficie del cono con il piano α, ad esempio quello indicato con P e considera la generatrice del cono passante per P.
  I segmenti PF e PP_1 sono tra loro ...congruenti... perché ...uscenti... ...da P e tangenti alla sfera nell'altro estremo... .
  Accade lo stesso se cambiamo il punto P e, di conseguenza, P_1? ...sì... .
- Ricorda la definizione di parabola: è il luogo dei punti equidistanti da un ...punto... F, detto ...fuoco..., e da una retta d, detta ...direttrice... .
- Osserva il modello. Sul rettangolo colorato è disegnata una retta d: essa è la retta intersezione di α con il piano γ contenente ...tutti i punti... ...di tangenza tra cono e sfera... .
- Per mostrare che la curva intersezione del cono con α è una parabola, dobbiamo mostrare che PF ≡ ...PQ... . Occorre completare il modello con il piano γ.

- Rimuovi il rettangolo colorato α dal cono e incastralo con il rettangolo trasparente γ (arrotola la parte centrale di γ e falla passare nella fenditura di α, poi distendila). Infila l'apice del cono nel foro circolare di γ e rimetti α al suo posto (puoi mettere via la sfera, ora non ti serve più). Infila uno spiedino (o uno spaghetto) nel foro H e appoggia la sua punta su P.
- La retta PH (lo spiedino) è ..perpendicolare.. a γ, dunque il triangolo PHP_1 è ..rettangolo..... in H, così come il triangolo ..P.H.Q..... .
- Inoltre PH è ..parallelo..... all'asse del cono, dunque l'angolo acuto HPP_1 è congruente alla ....apertura..... del cono.
- Come sono tra loro gli angoli HPP_1 e HPQ? Perché? (ricorda qual è l'inclinazione del piano α) ....congruenti (l'inclinazione di α è l'apertura del cono) .....
- Come puoi concludere che $PP_1 \cong PQ$? .....i triangoli rettangoli HPP_1 e HPQ sono congruenti (per 2° criterio) $\Rightarrow PP_1 \cong PQ$ .....
- Concludi la dimostrazione (rileggi il primo passaggio!) .....
.....
.....PF ≅ PP₁ , PP₁ ≅ PQ ⇒ PF ≅ PQ.....
.....
.....Ciò vale per ogni punto della curva.....
.....sezione, che è dunque una parabola.....
.....
.....