CONI E CONICHE

ovvero

PERCHÉ LA SEZIONE DI UN CONO È UNA CONICA ?

1 INTRODUZIONE

La parola **conica** sta per **sezione conica**; infatti gli antichi Greci definirono le coniche come le curve che si ottengono tagliando un cono con un piano *non* passante per il vertice del cono. Con metodi puramente geometrici (la geometria analitica non esisteva...), essi, in particolare **Apollonio** di Perga (262-190 a.C.), trovarono molte proprietà delle coniche.

Più spesso oggi le definiamo come luoghi dei punti del piano, dimenticandoci, per così dire, del cono. Naturalmente, lavorare direttamente con un luogo del piano è più pratico, ma che legame c'è tra le diverse definizioni? Perché la sezione di un cono con un piano opportunamente inclinato è un'ellisse e non, per esempio, una curva a forma di uovo? Dopo tutto, il cono è più "stretto" vicino al vertice, ed è perfettamente plausibile che ciò accada anche per la curva sezione.

Nel 1822 il matematico belga **Dandelin** propose una brillante dimostrazione, che fa uso di sfere tangenti al cono e al piano secante; in questo laboratorio, seguendo le sue idee, costruirai dei modelli tridimensionali per comprenderla più facilmente.

2 PER COMINCIARE

Questo paragrafo serve a richiamare alcuni fatti di geometria solida (parti A, C, D) o piana (parte B) che utilizzerai per la dimostrazione di Dandelin. Per quanto riguarda la geometria solida, volutamente non è stata fatta alcuna figura; usa liberamente gli oggetti che ti sono forniti, o quanto a tua disposizione, per visualizzare in un contesto 3D la situazione in esame.

A.- RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

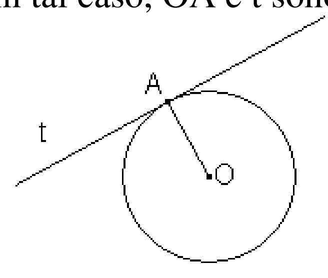
- Considera un piano α, un suo punto A, una retta r (nello spazio) passante per A. Quando la retta r è detta **perpendicolare** in A al piano α? (Suggerimento: con-

sidera le rette di α passanti per A) ....
....
Il punto A = r ∩ α è detto .... della perpendicolare.

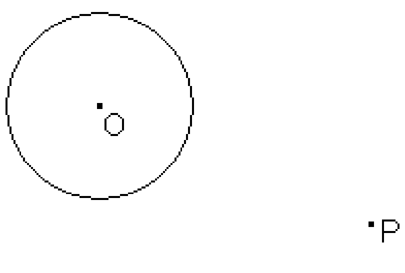
- La **proiezione ortogonale** di un **punto** P su un piano α è ....
....
- La **proiezione ortogonale** di una **retta** r su un piano α (cioè l'insieme delle proiezioni ortogonali dei punti di r) è una retta se ....
.... ; altrimenti è ....
- Dati un piano α e una retta r secante α (cioè avente un solo punto in comune con α), come definiresti l'**angolo** tra la **retta** e il **piano**? (Suggerimento: tieni conto della definizione precedente) ....
....
Controlla che la definizione sia valida senza eccezioni, altrimenti modificala.
- Dati due piani α e β aventi in comune una retta r, l'**angolo** tra i due **piani** è ......
....
....
- Dati un piano α e una retta r secante α, quanti piani ci sono contenenti la retta r e perpendicolari al piano α? ....
Controlla che la tua risposta sia valida senza eccezioni.

B.- CIRCONFERENZE E RETTE NEL PIANO

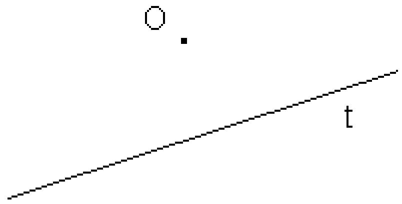
- Una **circonferenza** è il luogo dei punti del piano ....
da un punto O, detto .... Il suo raggio è ....
- Una retta t avente un solo punto A in comune con la circonferenza è detta ....
.... ; in tal caso, OA e t sono tra loro ....



- Se P è un punto esterno alla circonferenza c di centro O e raggio r, ci sono .... rette tangenti a c passanti per P. Per costruire con riga e compasso i punti di tangenza, bisogna intersecare c con ....
.... I punti di tangenza sono .... da P. Completa la figura.



- Data una retta t e un qualsiasi punto O del piano $\notin$ t, esiste un'unica circonferenza di centro O tangente a t; il punto di tangenza è ....
Completa la figura.



C.- SFERE

- La superficie sferica (**sfera** nel seguito) di centro O e raggio r è il luogo S dei punti dello spazio .... ; essa può essere ottenuta per rotazione completa (di 360°) di una .... intorno a ....
- Una retta t avente un solo punto A in comune con la sfera S è detta .... ; in tal caso, OA e t sono tra loro ....
- Se t e t' sono due rette passanti per P aventi rispettivamente i soli punti A e A' in comune con la sfera S, i segmenti PA e PA' sono tra loro ....
- Un **cerchio massimo** della sfera S è l'intersezione (o **sezione**) di S con un .... ; esso ha raggio ....
- Siano A un punto della sfera S, β un piano contenente la retta OA, c_β il cerchio massimo sezione della sfera con β, t_β la retta di β tangente a c_β in A. Al variare del piano β, le rette t_β descrivono il piano α .... in A alla retta OA. Tale piano ha distanza .... da O, ha in comune con la sfera .... e si chiama piano .... alla sfera in A.
- Dato un piano α e un qualsiasi punto O dello spazio $\notin \alpha$, esiste un'unica sfera di centro O tangente ad α; il punto di tangenza A è ....; il raggio è ....

D.- CONI

- Siano c una circonferenza, a la retta passante per il suo centro O e perpendicolare al piano che la contiene, V un punto di a (distinto da O). Le infinite semirette di origine V che passano per i punti di c costituiscono la **superficie conica circolare retta illimitata** (**cono** nel seguito) di **vertice** V e **direttrice** c; essa può essere generata per rotazione completa (di 360°) intorno all'**asse** a di una qualsiasi di queste .... , dette **generatrici** del cono.
L'angolo tra l'asse e una qualsiasi generatrice si chiama **apertura** del cono.

- Costruisci un cono (necessariamente limitato...) ritagliando e fissando con lo scotch lo **sviluppo** fornito.
- Le due generatrici intersezione del cono con un qualsiasi piano β contenente l'asse a formano un angolo di ampiezza ....
- Se da un punto V esterno a una sfera S si tracciano *tutte* le semirette tangenti a S, si ottiene un cono di vertice .... e asse la retta .... Poiché ogni generatrice del cono è tangente a S, il cono è detto .... alla sfera. I punti di tangenza formano una .... il cui piano è .... all'asse del cono.
  La sezione (intersezione) di sfera e cono con un qualsiasi piano β per a è data da un cerchio massimo e da due generatrici ad esso ....
- Viceversa, dato un qualsiasi cono illimitato, esso ha sfere tangenti di qualsiasi raggio; sai darne una giustificazione? ....
  ....
  ....
  ....
  ....

3 L ' ELLISSE

COSTRUZIONE DEL MODELLO

1. Taglia il rettangolo colorato lungo il contorno.

2. Sul rettangolo colorato taglia lungo metà curva, seguendo *accuratamente* l'arco BCD (per un risultato preciso, prima pratica con il cutter una breve incisione lungo l'arco BCD, poi infila la lama delle forbici nell'incisione e completa il taglio).

3. Taglia lo sviluppo laterale del cono (cui è stata tolta la parte più vicina al vertice per rendere più facile il montaggio). Taglia *accuratamente* dal punto A al punto B lungo la curva che si trova tra i due archi di circonferenza e dal punto nero sul bordo destro (dove finisce la tacca sulla linguetta) al punto D.

4. "Arrotola" il cono in modo da leggere correttamente le lettere scritte sulla superficie e chiudilo prima *sopra* e poi *sotto* il taglio. Per fare ciò, sovrapponi *esattamente* i bordi dello sviluppo del cono, lasciando la linguetta all'*interno*;

accertati che gli estremi delle linee “orizzontali” combacino e fissa con lo scotch, arrivando con quest’ultimo a un paio di millimetri dal taglio.

5. Per incastrare tra loro cono e piano, appoggia il cono sul tavolo, poi prendi in mano il rettangolo in modo da leggere correttamente le lettere scritte su di esso. Abbassa leggermente la parte del rettangolo con il punto F_2 e inseriscila dentro il cono (vicino al punto A sul cono), facendo contemporaneamente passare la punta del cono nel buco che si è formato. Fa’ scivolare il rettangolo verso il basso, fino a quando i punti segnati con lettere uguali coincidono. Quando hai capito come si fa, rimuovi *con delicatezza* il rettangolo, metti nel cono la sfera piccola S_1 e riposiziona il rettangolo (forse ti sarà più facile se capovolgi il cono...).

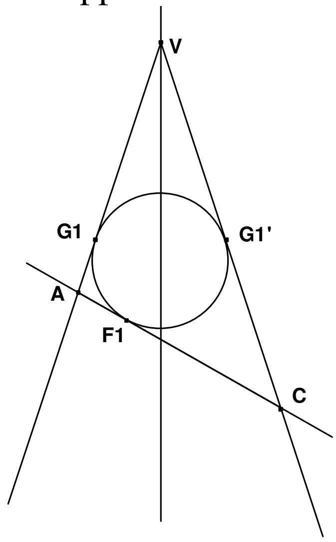
6. Posa la sfera grande S_2 sul tavolo e appoggiaci sopra il cono con l’inserto colorato. Ora sei pronto per ragionare: infatti, il modello che hai costruito rappresenta un cono circolare retto tagliato da un piano α (il rettangolo colorato) avente inclinazione, rispetto all’asse del cono, *maggiore* dell’apertura del cono e minore di un angolo retto.

LA DIMOSTRAZIONE

- Quante sono le sfere tangenti al cono e tangenti al piano secante α ? ....
- Come sono situate queste sfere rispetto al piano secante? ....
  ....
- I punti F_1 e F_2 sono i punti di contatto tra ....
- Considera sul modello tridimensionale un punto qualsiasi della curva intersezione della superficie del cono con il piano α, per esempio quello indicato con P, e la generatrice P_1P_2 del cono passante per P.
  I segmenti PF_1 e PP_1 sono .... perché ....
  ....
  Analogamente, ... $\cong PP_2$, quindi PF_1 + ... $\cong PP_1 + PP_2 = P_1P_2$.
- Che cosa succede se scegli un altro punto P’ della curva intersezione? Come puoi concludere che questa curva è un’ellisse? ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

UN PIANO IMPORTANTE

Immagina di tagliare cono, piano α e sfere tangenti con il piano β contenente l'asse a del cono e perpendicolare ad α. Quello che vedresti sul piano β (ovvero la *sezione* con β di cono, piano α e sfere) è in parte rappresentato nella figura seguente.



- Quale retta rappresenta la sezione del piano α con il piano β? ....
- Che cosa è per la sfera piccola S_1 la circonferenza nella figura? ....
  ....
- Considera i punti G_1, G_1' nella figura precedente; a quale linea appartengono i corrispondenti punti del modello tridimensionale? ....
  ....
- Completa la figura disegnando gli oggetti mancanti; per ottenere una figura precisa, ricorda che i punti della bisettrice di un angolo sono .... dai lati dell'angolo stesso.
- Sapresti giustificare perché i punti F_1 e F_2 appartengono a β? ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
- Sapresti giustificare perché i vertici A e C dell'ellisse appartengono a β? ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....