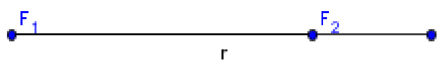
8 L ’ IPERBOLE

Questa scheda, nello spirito di quelle che la precedono, offre un’occasione per approfondire lo studio dell’iperbole dal punto di vista sintetico. Gli studenti proseguono il cammino iniziato lavorando con il concetto di luogo geometrico e continuano a lavorare in modo autonomo, costruendo e verificando le proprietà della conica sopra citata in analogia con quanto sperimentato in precedenza. Nel perseguire l’obiettivo di fornire una visione più unitaria delle coniche, la scheda parte dalla definizione classica di iperbole come luogo di punti del piano e prosegue proponendo una costruzione analoga a quella vista per le altre coniche ricorrendo all’uso del software dinamico GeoGebra.

L’iperbole è il luogo dei punti per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti F_1 e F_2 (fuochi).

Al punto 1. viene proposta la costruzione diretta dell’iperbole come luogo di punti con GeoGebra e, immediatamente dopo, una giustificazione della costruzione effettuata. Esaminiamone i vari passaggi:

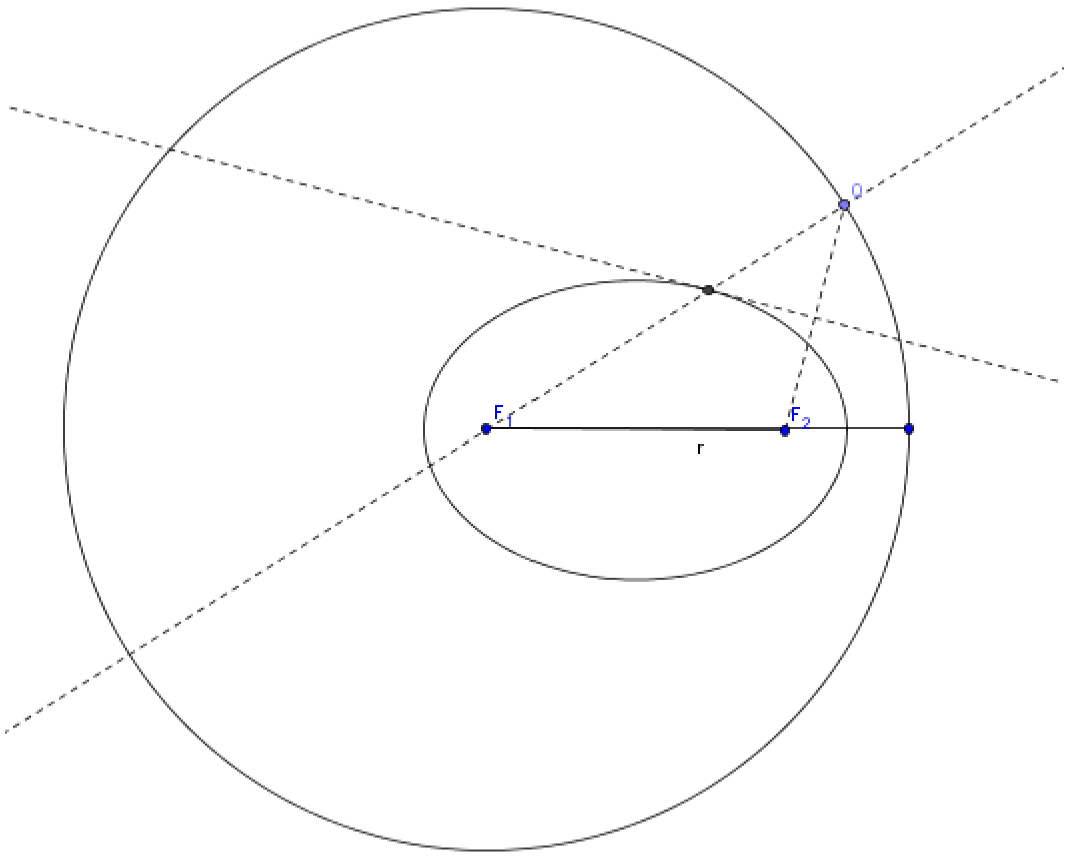
1. Disegna due **punti** F_1 e F_2 e un **segmento** più lungo di F_1F_2. **Rinomina** r questo segmento.



Inizialmente, in ragione dell’unitarietà del discorso costruttivo che si sta portando avanti sulle coniche, si parte proprio dalla costruzione precedentemente fatta per l’ellisse, ma, come si vedrà, predisponendo la generarazione di un’iperbole con delle piccole variazioni dinamiche del fuoco F_2 fatte in tempo reale con GeoGebra.

A mio parere, meglio disegnare F_1 e F_2 in posizione “non standard” e il segmento di lunghezza r a parte; nella tua figura sembra che stia sul segmento, ma allora NON lo posso trascinare fuori più avanti.

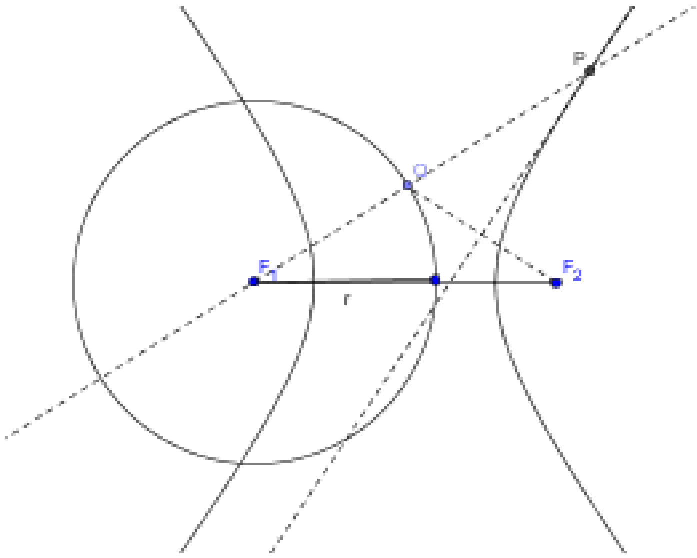
- Costruisci l’ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma delle distanze r come nella Scheda 7, ma disegnando la **retta** F_1Q anziché il segmento F_1Q (in altre parole, costruisci il **luogo** dei punti di intersezione della **retta** F_1Q con l’**asse** di QF_2, al variare di Q sulla circonferenza di centro F_1 e raggio r).



Ovviamente, si ottiene proprio un'ellisse. Ma la scheda subito chiede una modifica dinamica:

- Afferra con il **puntatore** il punto F_2 e trascinalo fuori dalla circonferenza.

Ciò che si ottiene si può vedere nella figura seguente:



Ora la scheda chiede di osservare il risultato, ma, cosa meno immediata, chiede anche una giustificazione teorica di quanto è dinamicamente apparso sullo schermo.

- Che cosa osservi? Giustifica perché la curva che ottieni è il luogo dei punti per i quali la differenza delle distanze dai punti fissati è r.

La curva ottenuta è un'iperbole perché il luogo dei punti P che si ottiene è proprio quello dei punti per i quali è costante la differenza delle distanze dai fuochi F_1 e F_2. Infatti, il segmento P F_1 meno il segmento P F_2 è sempre congruente , al variare di Q sulla circonferenza, al raggio r ≅ F_1 Q perché P F_1 - P F_2 ≅ P F_1 – PQ , con P F_2 ≅ PQ in quanto P si trova sull'asse del segmento Q F_2 . Nel discorso precedente, occorre aggiungere qualche simbolo di valore assoluto.

Dunque:

L'iperbole di fuochi F_1 e F_2 e differenza delle distanze r è il luogo dei punti di intersezione tra **la retta PQ e l'asse del segmento QF_2** al variare di Q su**lla circonferenza di centro QF_2 e raggio r.**

Adesso la scheda, sempre in analogia con quanto proposto per l'ellisse, approfondisce un aspetto fondamentale della costruzione fatta: e cioè il fatto che l'asse del segmento Q F_2 risulta tangente all'iperbole nel punto P, ovviamente.
La domanda per gli allievi è:

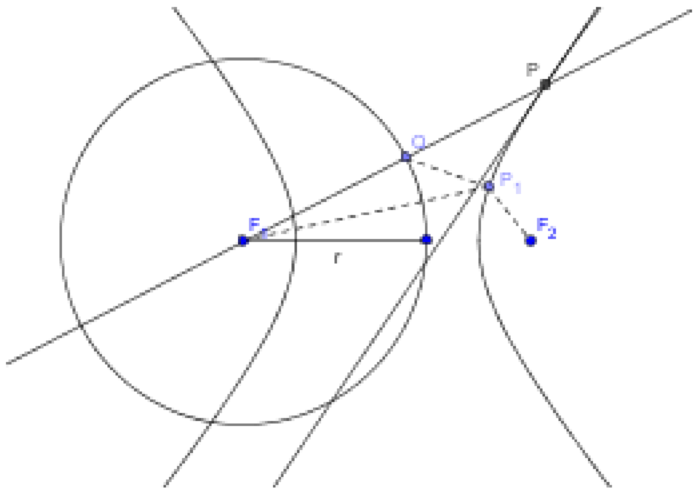
2. Quale retta disegnata nella costruzione che hai appena ottenuto appare tangente all'iperbole? ....

E subito, naturalmente, si chiede una giustificazione di tipo euclideo sintetico.

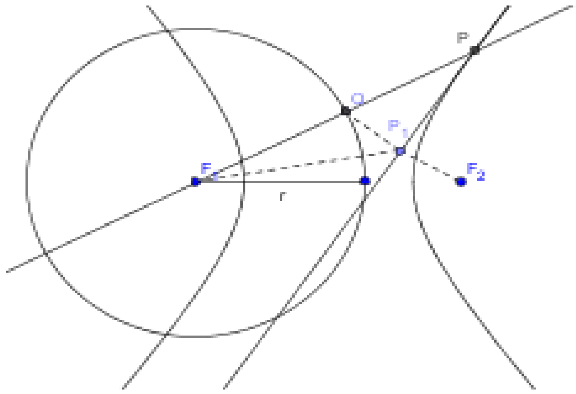
* Per giustificarlo rigorosamente, puoi ripetere il ragionamento fatto per l'ellisse?

La giustificazione si basa su una disuguaglianza triangolare che gli studenti dovrebbero aver studiato per bene durante il biennio e dovrebbero ricordare. Nel caso in cui dovessero manifestare una dimenticanza si può fornire un piccolo aiuto.

Cenno alla giustificazione richiesta:
Se si sceglie un altro punto P_1 sull'iperbole, si vede che non può appartenere all'asse del segmento QF_2 . Infatti, osservando la seguente figura, si ha:



P_1F_1 - $P_1F_2 \cong$ F_1Q , perché P_1 è sull'iperbole. Dunque P_1F_1 - $F_1Q \cong P_1F_2$. Ora, considerato il triangolo QP_1F_1 , per una disuguaglianza triangolare si ha :
$QP_1 > P_1F_1$ - F_1Q e quindi $QP_1 > P_1F_2$. Pertanto il punto P_1 non è sull'asse del segmento QF_2 . Alternativamente, con un ragionamento simile, si potrebbe anche mostrare che un altro punto dell'asse di QF_2 non può essere su quel ramo di iperbole che contiene il punto P.
Guardate il disegno sotto:



Risulta: P_1F_1 - $P_1F_2 \cong$ P_1F_1 - P_1Q < $QF_1 \cong$ r. Quindi P_1 non può essere sull'iperbole.

Anche qui, occorre aggiungere qualche simbolo di valore assoluto.

Personalmente, ritengo più significativo mostrare che per ogni punto dell'asse di QF_2, diverso da P, risulta $| P_1F_1 - P_1F_2 | < r$, dunque la retta sta tutta nella "clessidra" individuata dai due rami dell'iperbole.