



L' ELLISSE B

N.B.- In **grassetto** sono indicati i comandi di GeoGebra da usare.

Dal menù **Visualizza**, disattiva gli **Assi** e la **Finestra Algebra**.

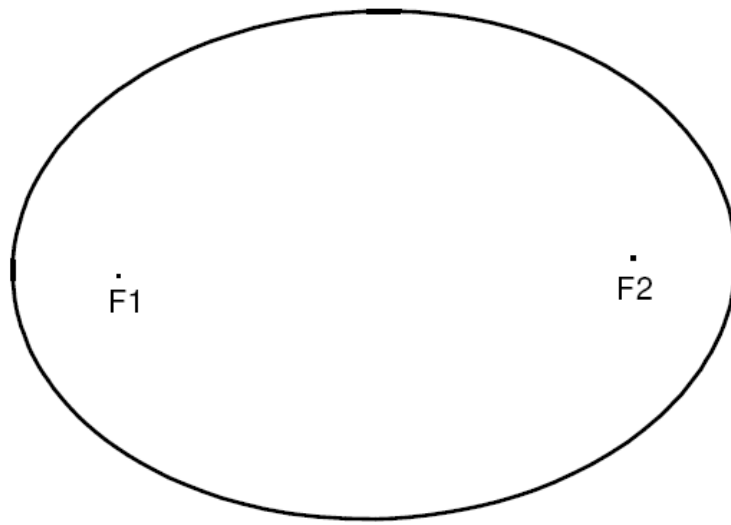
Per nascondere (*non* cancellare!) gli oggetti che non ti occorrono più e “ripulire” una figura, usa il comando **Mostra oggetto** (clic destro sull’elemento da nascondere).

L’ellisse è il luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti F_1 e F_2 (fuochi).

1. Nell’ultima pagina è disegnata l’ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma delle distanze r .
 - Prendi un punto P sull’ellisse. Traccia i segmenti F_1P e PF_2 , poi prolunga F_1P di un segmento PQ congruente a PF_2 .
Allora $F_1Q = \dots$, cioè Q appartiene alla
Inoltre, poiché PF_2 e PQ sono congruenti, P è un punto appartenente a
..... del segmento
Valgono le stesse conclusioni al variare di P sull’ellisse?
 - Viceversa, considera un generico punto Q' avente distanza r da F_1 e congiungilo con F_1 . Se l’ellisse non fosse disegnata, che cosa potresti tracciare per individuare il punto dell’ellisse appartenente a F_1Q' ? Perché?
(SUGGERIMENTO: considera il segmento $Q'F_2$.)
.....
.....
 - Queste considerazioni suggeriscono una diversa caratterizzazione dei punti dell’ellisse:

L’ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma delle distanze r è il luogo dei punti di intersezione tra
al variare di Q su

2. Con GeoGebra disegna due **punti** F_1 e F_2 e un **segmento** più lungo di F_1F_2 . Usando il comando **luogo**, fa’ una costruzione per illustrare l’enunciato precedente.
Ricordati di muovere gli oggetti iniziali per assicurarti che tutto funzioni.
 3. Quale retta disegnata nella costruzione che hai appena ottenuto appare tangente all’ellisse?
- * Prova a giustificarlo rigorosamente in ultima pagina (SUGGERIMENTO: mostra che ogni altro punto della retta è esterno all’ellisse).



_____ r _____



L' ELLISSE B - SOLUZIONI

N.B.- In **grassetto** sono indicati i comandi di GeoGebra da usare.

Dal menù **Visualizza**, disattiva gli **Assi** e la **Finestra Algebra**.

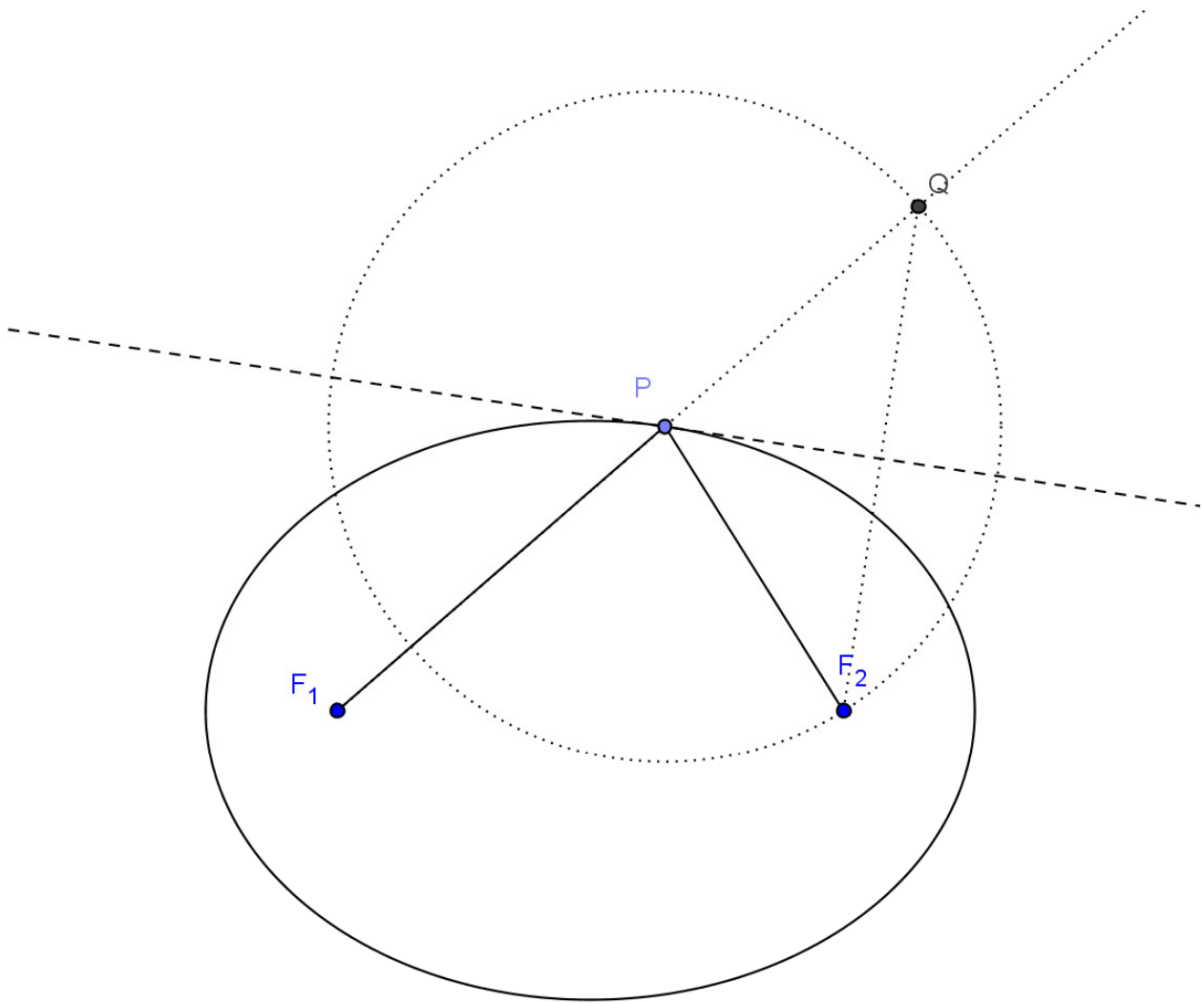
Per nascondere (*non* cancellare!) gli oggetti che non ti occorrono più e "ripulire" una figura, usa il comando **Mostra oggetto** (clic destro sull'elemento da nascondere).

L'ellisse è il luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti F_1 e F_2 (fuochi).

1. Nell'ultima pagina è disegnata l'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma delle distanze r .
 - Prendi un punto P sull'ellisse. Traccia i segmenti F_1P e PF_2 , poi prolunga F_1P di un segmento PQ congruente a PF_2 . Allora $F_1Q = r$, cioè Q appartiene alla **circonferenza di centro F_1 e raggio r** . Inoltre, poiché PF_2 e PQ sono congruenti, P è un punto appartenente a **l'asse del segmento F_2Q** .
Valgono le stesse conclusioni al variare di P sull'ellisse? **Sì**.
 - Viceversa, considera un generico punto Q' avente distanza r da F_1 e congiungilo con F_1 . Se l'ellisse non fosse disegnata, che cosa potresti tracciare per individuare il punto dell'ellisse appartenente a F_1Q' ? Perché?
(SUGGERIMENTO: considera il segmento $Q'F_2$.) **Si potrebbe tracciare l'asse del segmento F_2Q' e individuare P come intersezione dell'asse con F_1Q' in questo modo $PF_2 = PQ$ e quindi $PF_1 + PF_2 = r$.**
 - Queste considerazioni suggeriscono una diversa caratterizzazione dei punti dell'ellisse:

L'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma delle distanze r è il luogo dei punti di intersezione tra **il segmento F_1Q di lunghezza r e l'asse del segmento F_2Q** al variare di Q su **una circonferenza di raggio r e centro F_1** .

2. Con GeoGebra disegna due **punti** F_1 e F_2 e un **segmento** più lungo di F_1F_2 . Usando il comando **luogo**, fa' una costruzione per illustrare l'enunciato precedente.
Ricordati di muovere gli oggetti iniziali per assicurarti che tutto funzioni.
3. Quale retta disegnata nella costruzione che hai appena ottenuto appare tangente all'ellisse? **L'asse del segmento F_2Q**
* Prova a giustificarlo rigorosamente in ultima pagina (SUGGERIMENTO: mostra che ogni altro punto della retta è esterno all'ellisse).



r





L'ELLISSE B – COMMENTI ALLA SCHEDA

L'obiettivo della scheda è quello di mostrare una definizione alternativa di ellisse che ci aiuti a stabilire un'analogia con le altre coniche, la parabola e l'iperbole. Per le attività di questa scheda è richiesto l'uso del software GeoGebra, come foglio di disegno dinamico, disattivando quindi gli assi cartesiani e la finestra algebra.

1. Per questa attività non è richiesto l'utilizzo del software, si consegna ai ragazzi il foglio allegato e si richiedono alcune osservazioni sull'ellisse riportato. L'obiettivo è quello di dare ai ragazzi una nuova caratterizzazione dei punti dell'ellisse. Si vogliono dimostrare quindi le seguenti proposizioni
 - Sia P un punto sull'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma delle distanze dai fuochi pari a r . Allora P è l'intersezione tra l'asse del segmento F_2Q e il segmento F_1Q , dove Q è il punto che corrisponde a P sulla circonferenza d di raggio r e centro F_1 .

Dimostrazione.

Una volta tracciata la circonferenza d di centro F_1 (analogamente per F_2) e raggio r , ad ogni punto P sull'ellisse corrisponde un punto Q su d : per individuarlo basta tracciare la retta passante per F_1 e per il punto P .

Dal momento che per ipotesi P sta sull'ellisse, P soddisfa la proprietà

$$F_1P + F_2P = r \quad (1)$$

ma $F_1Q = r$ perché tale segmento è un raggio per la circonferenza d ; quindi vale

$$F_1Q = F_1P + PQ = r \quad (2)$$

confrontando la (1) con la (2) si ottiene che $F_2P = PQ$, dunque il triangolo F_2PQ è isoscele di base F_2Q e, per una nota proprietà dei triangoli isosceli, il vertice P giace sull'asse di F_2Q . Questo conclude la nostra dimostrazione dal momento che due rette distinte (in questo caso F_1Q e l'asse di F_2Q) si incontrano in al più un punto.

- Sia d la circonferenza di raggio r e centro F_1 , preso un punto Q su d e chiamato P il punto di intersezione tra il raggio F_1Q e l'asse del segmento F_2Q , allora tale punto P appartiene all'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma delle distanze dai fuochi pari a r .

Dimostrazione.

Sapendo che il punto P appartiene all'asse del segmento F_2Q , possiamo affermare che P è vertice del triangolo isoscele F_2PQ e che $PQ = F_2P$. Poiché P è un punto del segmento F_1Q , possiamo scrivere

$$r = F_1Q = F_1P + PQ = F_1P + F_2P$$



ed ottenere la tesi: la proprietà $r = F_1P + F_2P$ ci permette di concludere che il punto P giace sull'ellisse di fuochi F_1 e F_2 e somma r delle distanze dai due fuochi.

2. Con questa attività si utilizza GeoGebra per mettere in pratica quanto si è appreso al punto precedente. Grazie alla nuova caratterizzazione dell'ellisse, infatti, è possibile fare una costruzione di questa conica con il software dinamico, definendo l'ellisse come luogo di punti al variare del punto Q sulla circonferenza "direttrice" d .

N.B.- Le curve definite con il comando **luogo** non si comportano "bene" quando vengono intersecate con gli altri oggetti creati con GeoGebra. Risulta infatti impossibile utilizzare il comando **intersezione di due oggetti** selezionando il luogo creato come uno degli oggetti da intersecare.

Un modo per aggirare il problema è quello di disegnare 5 diversi punti sul luogo appena tracciato e poi usare il comando **Conica per cinque punti**. La nuova conica disegnata verrà riconosciuta come un qualsiasi altro oggetto disegnato in GeoGebra, quindi senza alcun problema nel creare le intersezioni.

Per maggiore chiarezza riportiamo qui, passo per passo, la costruzione richiesta:

- Tracciare due punti F_1 e F_2 sul foglio.
- Tracciare una circonferenza di centro F_1 e raggio maggiore della distanza tra F_1 e F_2 (il punto F_2 quindi risulterà interno alla circonferenza appena tracciata).
- Tracciare un nuovo punto Q sulla circonferenza e il segmento di estremi F_1 e Q .
- Usando il comando **Asse di un segmento** selezioniamo i punti Q e F_2 .
- Tracciamo il punto P di intersezione tra l'asse appena disegnato e il segmento F_1Q .
- Con il comando **Luogo** selezioniamo prima il punto P poi il punto Q .

3. L'asse del segmento F_2Q è la retta che risulta tangente all'ellisse nel suo punto P . Per giustificare tale affermazione basta osservare che ogni altro punto P' su tale retta è esterno all'ellisse, infatti risulterebbe per esso

$$r < F_1P' + F_2P' = F_1P' + P'Q \quad (*)$$

dove l'uguaglianza $F_2P' = P'Q$ è garantita dal fatto che P' giace sull'asse del segmento F_2Q . Ma allora la (*) è valida per la disuguaglianza triangolare: nel triangolo F_1QP' la somma dei lati F_1P' e $P'Q$ è sempre maggiore del terzo lato $F_1Q = r$.



L'ELLISSE B – ESERCIZIO PROPOSTO

Proponiamo qui un esercizio che è possibile utilizzare come complemento all'attività della scheda L'ELLISSE B.

Esercizio

Traccia con GeoGebra tre punti distinti; disegna l'ellisse avente per fuochi due di essi e passante per il terzo punto.

- E' sempre possibile trovare l'ellisse richiesto? Perché?
- Quante possibilità hai per disegnarlo?
- Cosa succede nel caso in cui i punti fossero allineati?

Esercizio Proposto – Commenti

Il seguente esercizio è un adattamento per GeoGebra di uno degli usuali esercizi di geometria analitica che si possono reperire su un qualsiasi testo di matematica per la terza classe di una scuola superiore di secondo grado.

Nell'esercizio originale veniva richiesto agli studenti di individuare l'equazione di un'ellisse noti i due fuochi e il passaggio per un punto. In questo esercizio si parte sempre dai tre punti, ma la costruzione richiesta è una costruzione con riga e compasso, che non richiede l'utilizzo di formule.

Esercizio Proposto – Soluzione

Traccia con GeoGebra tre punti distinti; disegna l'ellisse avente per fuochi due di essi e passante per il terzo punto.

Riportiamo qui i passi della costruzione:

- Tracciare tre punti sul foglio: chiamiamo due di essi F_1 e F_2 e il terzo punto P**
- Tracciare la circonferenza di centro P e raggio PF_2**
- Tracciare la semiretta F_1P , il punto di intersezione con la circonferenza appena tracciata sarà il punto Q**
- Tracciare la circonferenza d di centro F_1 e raggio F_1Q pari alla somma delle distanze di P dai due fuochi F_1 e F_2**
- Una volta trovata la circonferenza d la costruzione prosegue come quella descritta al punto 2. dei commenti a questa scheda.**

- E' sempre possibile trovare l'ellisse richiesto? Perché? **La condizione per cui la somma delle distanze del punto di passaggio dai fuochi sia maggiore della distanza focale deve essere soddisfatta: ciò è automaticamente vero, presi tre punti non allineati, per la disuguaglianza triangolare.**
- Quante possibilità hai per disegnarlo? **Fissati i tre punti di partenza, si possono disegnare tre diverse ellissi.**



- Cosa succede nel caso in cui i punti fossero allineati? **Una delle tre ellissi degenera in un segmento: viene a mancare infatti la condizione ricordata al primo punto, il risultato non è un'ellisse, ma il segmento di estremi i due punti scelti come fuochi.**