



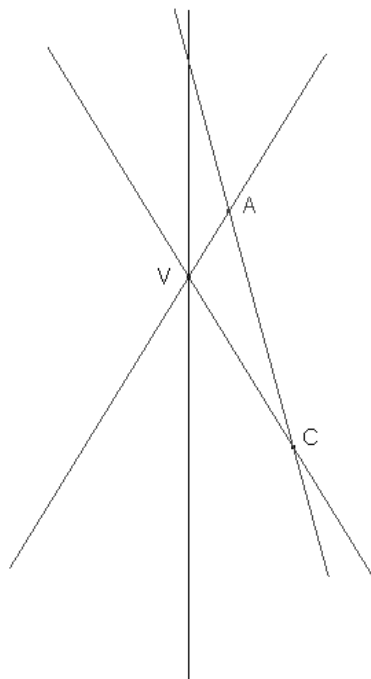
4 L'IPERBOLE

Ora fa' uno sforzo di immaginazione: supponi di avere un cono *completo* (o a due falde), cioè la superficie generata dalla rotazione intorno ad un asse di una retta incidente l'asse in V (una specie di "clessidra" illimitata...), e di tagliarlo con un piano α non passante per V .

Se l'angolo tra l'asse del cono e il piano α (angolo tra l'asse e la sua proiezione ortogonale su α) è *minore* dell'apertura del cono stesso (angolo tra l'asse e una generatrice del cono), questo piano taglia entrambe le parti del cono.

- Quante sono le sfere tangenti al cono completo (cioè tangenti a tutte le generatrici del cono) e tangenti al piano?
- Come sono situate queste sfere rispetto al piano secante?
- A quale retta appartengono i centri delle sfere tangenti?
- Immagina di tagliare cono completo, piano e sfere tangenti con il piano β passante per l'asse del cono e perpendicolare al piano α .

Nella figura seguente sono disegnate le *sezioni* con β del cono e del piano α ; completala rappresentando le sezioni delle sfere e i punti significativi; per ottenere una figura precisa, ricorda che i punti della bisettrice di un angolo sono dai lati dell'angolo stesso.



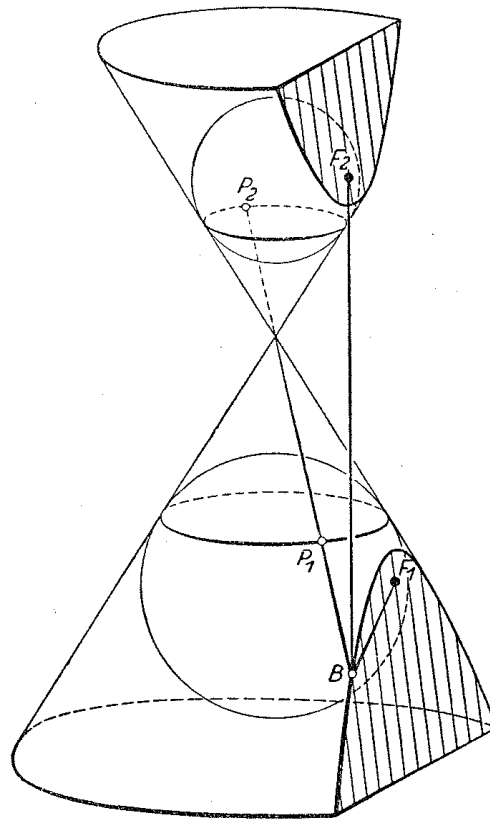
- Da quante parti è costituita, questa volta, la curva intersezione tra cono e piano?, una per ogni
- SE questa curva è una conica, che conica sarà?



- Scrivi la definizione di questa conica.

.....

- Invece di costruire un modello, usa la figura qui sotto che lo rappresenta (naturalmente, è possibile rappresentare solo una parte limitata del cono completo). *Nota che, per maggiore chiarezza, nella figura la parte di piano secante interna al cono completo è stata tratteggiata e che non sono rappresentate le parti di cono "inutili".*



Osservando attentamente la figura, cerca di modificare la dimostrazione fatta nel caso dell'ellisse e concludi che la curva intersezione tra cono completo e piano è davvero un'iperbole. Scrivi la dimostrazione qui sotto.

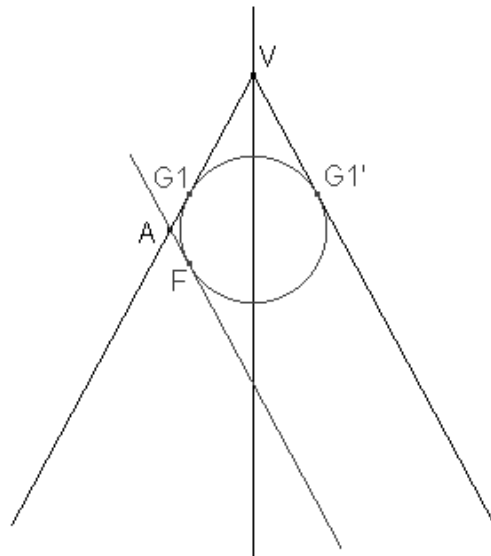
.....



5 LA PARABOLA

Resta da considerare il caso in cui l'inclinazione del piano α rispetto all'asse del cono è uguale all'apertura del cono stesso. Questa volta costruirai un modello, ma prima rispondi a queste domande.

- Secondo te, in questo caso è necessario considerare un cono completo oppure no?
- Quante sono le sfere tangenti al cono e tangenti al piano α ?
- Spiega che cosa rappresenta la figura seguente. Non dimenticare di scrivere a quale generatrice è parallelo il piano α , e che cosa rappresentano i punti G_1 , G_1' , F ed A.



.....

.....

.....

.....

.....

COSTRUZIONE DEL MODELLO

1. Taglia il rettangolo colorato lungo il contorno.
2. Sul rettangolo colorato taglia *accuratamente* lungo la curva, ma *solo* dal bordo del rettangolo finì ai punti indicati con un quadratino nero. Con il cutter taglia lungo d, ma *solo* nella parte compresa tra i due punti indicati con una crocetta.



3. Taglia lo sviluppo laterale del cono (cui è stata tolta la parte più vicina al vertice per rendere più facile il montaggio). Taglia *accuratamente* lungo la curva che si trova sotto l'arco di circonferenza, ma *solo* nella parte compresa tra i punti indicati con un quadratino nero (per un risultato preciso, prima pratica con il cutter una breve incisione, poi infila la lama delle forbici nell'incisione e completa il taglio).
4. "Arrotola" il cono in modo da leggere correttamente le lettere scritte sulla superficie e sovrapponi *esattamente* i bordi dello sviluppo del cono, lasciando la linguetta all'*interno*. Accertati che gli estremi della linea "orizzontale" combacino e chiudi il cono fissando con lo scotch.
5. Posa il cono sul tavolo, prendi in mano il rettangolo colorato in modo da leggere correttamente le lettere scritte su di esso e incastralo nel cono facendo scivolare nella fenditura del cono la parte di rettangolo compresa tra i tagli che arrivano al bordo inferiore (può essere utile curvare leggermente il rettangolo). Accertati che i punti segnati coincidano. Il modello che hai costruito rappresenta un cono circolare retto tagliato da un piano α avente inclinazione, rispetto all'asse del cono, *uguale* all'apertura del cono. Capovolgi il cono e inserisci la sfera piccola in modo che risulti tangente al cono e al piano α .
6. Il rettangolo trasparente e lo spiedino ti serviranno tra un po'. Per intanto, ritaglia il rettangolo ed elimina la parte interna del disco; poi, partendo dai lati del rettangolo, taglia lungo d fino ai punti indicati con una crocetta. Con la punta del compasso fa' un foro nel punto H.

LA DIMOSTRAZIONE

- Considera sul modello tridimensionale un punto qualsiasi della curva intersezione della superficie del cono con il piano α , ad esempio quello indicato con P e considera la generatrice del cono passante per P.
I segmenti PF e PP_1 sono tra loro perché
.....
Accade lo stesso se cambiamo il punto P e, di conseguenza, P_1 ?
- Ricorda la definizione di parabola: è il luogo dei punti da un F, detto, e da una retta d , detta
- Osserva il modello. Sul rettangolo colorato è disegnata una retta d : essa è la retta intersezione di α con il piano γ contenente
- Per mostrare che la curva intersezione del cono con α è una parabola, dobbiamo mostrare che $PF \cong$ Occorre completare il modello con il piano γ .



- Rimuovi il rettangolo colorato α dal cono e incastralo con il rettangolo trasparente γ (arrotola la parte centrale di γ e falla passare nella fenditura di α , poi distendila). Infila l'apice del cono nel foro circolare di γ e rimetti α al suo posto (puoi mettere via la sfera, ora non ti serve più). Infila uno spiedino (o uno spaghetti) nel foro H e appoggia la sua punta su P.
- La retta PH (lo spiedino) è a γ , dunque il triangolo PHP_1 è in H, così come il triangolo
- Inoltre PH è all'asse del cono, dunque l'angolo acuto HPP_1 è congruente alla del cono.
- Come sono tra loro gli angoli HPP_1 e HPQ ? Perché? (ricorda qual è l'inclinazione del piano α)
- Come puoi concludere che $PP_1 \cong PQ$?
- Concludi la dimostrazione (rileggi il primo passaggio!)